Sobre las soluciones no convencionales a la ecuación de *Riccati*

Encarnación Salinas Hernández
esalinas@ipn.mx

Escuela Superior Cómputo-IPN

Abril de 2011

Desarrollo de la presentación

- **Motivación:**
¿ Qué significa resolver una ecuación diferencial?
La ecuación diferencial de primer orden lineal no homogénea
La ecuación diferencial de segundo orden lineal no homogénea
Algunas ecuaciones no lineales: *Bernoulli* y *Riccati*

- **¿Porqué es importante resolver *Riccati*?**

- **Primer resultado**: Fórmula a la ecuación de *Riccati*

- **Segundo resultado**: Extensión de los resultado aplicando variación de parámetros

- **Conclusiones**

Motivación

¿Que significa resolver una ecuación algebráica?

Ejemplo 1 .- Sea

$$3x = 5 \tag{1}$$

... y después de un cálculo muy exahustivo llegamos a que

$$x = \frac{5}{3} \tag{2}$$

es decir, el conjunto solución es un punto $x = \frac{3}{5}$

De hecho dada

$$ax = b \tag{3}$$

,

la solución estará dada por

$$x = \frac{b}{a}, a \neq 0 \tag{4}$$

¡ Que es la solución general para una ecuación algebráica de primer orden!

Ejemplo 2 .- Compliquemos las cosas un poco

Ahora, ¿se podrá resolver esta ecuación más compleja?

$$7x^2 - 93x - 13 = 0 \tag{5}$$

¡¡Claro que si!!

de hecho, se puede resolver el caso general

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{6}$$

con a, b, c reales, las soluciones estan dadas por

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{7}$$

En otras palabras, dada cualquier ecuación algebráica de segundo grado,**¡¡esta tendra solución!!**

La ecuación diferencial de primer orden lineal no homogénea

Ejemplos.- ¿Cuáles serán las soluciónes de las sig. ecuaciones diferenciales?

$$y_1'(x) + 2xy_1(x) = 0, y_2'(x) - xy_2(x) = x \tag{8}$$

estas son:

$$y_1(x) = C_1 e^{-x^2}, y_2(x) - ln[y_2(x) + 1] = \frac{x^2}{2} + C_2 \tag{9}$$

con C_1 y C_2 constantes de integración

¿Habrá solución para la ecuación general diferencial lineal no homogénea?

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) + c(x) = 0 \tag{10}$$

Desde luego que si!!

Primero se reacomoda en la forma

$$y'(x) + P(x)y = Q(x) \tag{11}$$

con $P(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$, $Q(x) = -\frac{c(x)}{a(x)}$ y $a(x) \neq 0$, luego la solución es

$$y(x) = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx \tag{12}$$

La ecuación diferencial de segundo orden lineal no homogénea

Dada una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x) + f(x) = 0 \tag{13}$$

¿tiene solución analítica?

¡¡¡NO!!!

Algunas ecuaciones diferenciales no lineales

La ecuación diferencial de **Bernoulli**

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \tag{14}$$

después de aplicarse el cambio de variable $z = y^{1-n}$, tiene como solución:

$$y = [Ce^{-\int (1-n)P(x)dx} + e^{-\int (1-n)P(x)dx} \int e^{\int (1-n)P(x)dx}(1-n)Q(x)dx]^{\frac{1}{1-n}} \tag{15}$$

¡esto se complica cada vez más!

La ecuación diferencial de **Riccati** se define como

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x) \tag{16}$$

para poder solucionarla se propone el cambio $y = y_0 + z$, luego ésta se transforma en

$$z' + (P(x) + 2Q(x)y(x)_0)z = -Q(x)z^2 \tag{17}$$

ésta es una ecuación tipo *Bernoulli*, la cual se resuelve al aplicarse el cambio de variable $w = z^{1-2}$, para obtener

$$w' - [P(x) + 2Q(x)y_0]w = Q(x) \tag{18}$$

donde la solución es **inmediata**

$$w(x) = Ce^{\beta(x)} + e^{\beta(x)} \int e^{-\beta(x)} Q(x)dx \tag{19}$$

con $\beta(x) = \int [P(x) + 2Q(x)y_0]dx$

ahora bien, si retornamos a la variable original, mediante los cambios $w = z^{-1}$ así como $y = y_0 + z$, obtenemos finalmente

$$y = y_0 + \frac{\alpha(x)}{C + \int \alpha(x)Q(x)dx} \tag{20}$$

con $\alpha(x) = e^{-\int [P(x)+2Q(x)y_0]dx}$

¿Por qué es importante resolver *Riccati*?

Aparece en:

En Biología: **El estudio del DNA**

La Física: **Mecánica Cuántica**

La ingeniería: **Teoría de Control**

Hasta incluso: **En Política Económica**

Desde luego en: **Las Matemáticas**

Primer resultado

Obtención de la fórmula restringida a *Riccati*

Dada la ecuación en su forma general

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x) \tag{21}$$

si $R(x) = Q(x)e^{-2\int P(x)dx}$ y la constante de integración $c = 1$, entonces la solución esta dada por:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx} Tanh[\int Q(x)e^{-\int P(x)dx} dx] \tag{22}$$

Prueba:

considerese que $y = uz^{\frac{1}{2}}$, donde u es una función a encontrar. A partir de ahi, la expresión (21) se trasforma en:

$$z' + \frac{2z}{u}\{u' + Pu\} + 2uQz^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{u}z^{\frac{1}{2}}R \tag{23}$$

impongamos que $u' + Pu = 0$ lo que implica $u = e^{-\int Pdx}$, luego la ecuación a resolver es

$$z' + 2uQz^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{u}z^{\frac{1}{2}}R \tag{24}$$

si hacemos ahora $\beta = z^{\frac{1}{2}}$, con ello

$$\beta' + uQ\beta^2 - \frac{R}{u} = 0 \tag{25}$$

si pedimos que $R = Qu^2$, entonces dicha expresión se reduce a

$$\beta' + uQ\beta^2 - Qu = 0 \tag{26}$$

o tambien

$$\beta' = uQ[1 - \beta^2] \tag{27}$$

la cual es separable, y cuya solución esta dado por

$$\beta = \frac{ce^{2s} - 1}{ce^{2s} + 1} \tag{28}$$

donde $s = s(x) = \int Qudx$ y $u = u(x) = e^{-\int pdx}$; por otro lado si recordamos que $y = uz^{\frac{1}{2}} = u\beta$, entonces resulta que

$$y = e^{-\int pdx}\left\{\frac{ce^{2\int Qe^{-\int pdx}dx} - 1}{ce^{2\int Qe^{-\int pdx}dx} + 1}\right\} \tag{29}$$

al hacer $c = 1$, llegamos a la expresión citada

$$y = e^{-\int p(x)dx} tanh\left[\int Q(x)e^{-\int p(x)dx}dx\right] \tag{30}$$

Es importante mencionar que al encontrar esta solución, no se tuvo que partir de la existencia de una solución partícular como usualmente se requiere. Por otro lado, cabe señalar que dicho resultado ya está reportado en el **Handbook** "exact solutions for ordinary differential equations", en la sección donde abordan las soluciones a la ecuación de Riccati; aunque no se precisa la forma en que se obtuvo dicho resultado, quizás fue de distinta manera ya que en su solución se introduce una constante **a**, la cual no se requirió en esta deducción.

- **Ejemplo**

Dada la siguiente ecuación diferencial tipo *Riccati*

$$\mathbf{y'} + e^{\lambda x} Tan(e^{\lambda x})\mathbf{y} + Cos^{-\frac{1}{\lambda}}(e^{\lambda x})[x^{\alpha} - \frac{\beta}{4x^{\gamma}}]\mathbf{y}^2 = Cos^{-\frac{1}{\lambda}}(e^{\lambda x})[x^{\alpha} - \frac{\beta}{4x^{\gamma}}]cos^{\frac{2}{\lambda}}(e^{\lambda x}) \tag{31}$$

la solución esta dada como

$$\mathbf{y} = cos^{\frac{1}{\lambda}}(e^{\lambda x}) Tanh[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{\beta}{4(\gamma-1)x^{\gamma-1}}] \tag{32}$$

Segundo resultado: Extensión de los resultados aplicando variación de parámetros

A partir de la ecuación diferencial de Riccati

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x) \tag{33}$$

sea

$$y = v(x) + u(x)tanh[\int f(x)dx] \tag{34}$$

con $u(x)$ y $v(x)$ parámetros a encontrar, ahora sustituyendo (34) en (33) obtenemos

$$\begin{aligned} v' + Qv^2 + Pv + uf + (u' + 2Quv + Pu)tanh[\int fdx] \\ +(-uf + Qu^2)tanh^2[\int fdx] = R \end{aligned} \tag{35}$$

ahora si imponemos que se cumpla

$$\begin{aligned} v' + Qv^2 + Pv + uf &= R \\ u' + 2Quv + Pu &= 0 \\ -uf + Qu^2 &= 0 \end{aligned} \tag{36}$$

de la tercera ecuación se desprende inmediatamente que

$$u = \frac{f}{Q} \tag{37}$$

que al sustituirse en la segunda, obtenemos para v

$$v = -\frac{1}{2}\left[P + \frac{Q}{f}\left(\frac{f}{Q}\right)'\right] \tag{38}$$

finalmente si sustituimos (38) y (37) en la primera ecuación, obtenemos para R que

$$R = \frac{f^2}{Q} - \frac{1}{2}\left[P + \frac{Q}{f}\left(\frac{f}{Q}\right)'\right]' + \frac{Q}{4}\left[P + \frac{Q}{f}\left(\frac{f}{Q}\right)'\right]^2 - \frac{P}{2}\left[P + \frac{Q}{f}\left(\frac{f}{Q}\right)'\right] \tag{39}$$

por lo tanto la expresión (34) tiene la forma

$$y = -\frac{1}{2}\left[P + \frac{Q}{f}\left(\frac{f}{Q}\right)'\right] + \frac{f}{Q} tanh[\int f(x)dx] \tag{40}$$

con $f(x)$ una función arbitraria.

De los resultados anteriores se desprenden varias cosas interesantes a destacar:

Primero: si hacemos

$$-\frac{1}{2}\left[P+\frac{Q}{f}\left(\frac{f}{Q}\right)'\right]=k \tag{41}$$

ello implica que

$$f(x)=Qe^{-\int(P-k)dx} \tag{42}$$

y resulta que la ecuación de Riccati se reduce a

$$y'+P(x)y+Q(x)y^2=Qe^{-2\int(P-k)dx}+\frac{Qk^2}{4}-\frac{Pk}{2} \tag{43}$$

cuya solución estará dada por

$$y=-\frac{k}{2}+e^{-\int(P-k)dx}tanh[\int Qe^{-\int(P-k)dx}dx] \tag{44}$$

curiosamente al considerar $k=0$, se recupera el primer resultado

Segundo:

Ahora supongase que $P(x) = 0$ y $Q(x) = 1$, entonces la ecuación de Riccati se reduce a

$$y' + y^2 = f^2 - \frac{1}{2}(\frac{f'}{f})' + \frac{1}{4}(\frac{f'}{f})^2 \tag{45}$$

cuya solución es

$$y = -\frac{1}{2}\frac{f'}{f} + ftanh[\int f(x)dx] \tag{46}$$

la ecuación (45) es muy interesante, ya que éste tipo de soluciones podrian ser importantes en la mecánica cuántica.

Conclusiones

• El problema de la ecuación de *Riccati*, es un problema abierto, ya que en la actualidad no existe aún solución analítica o exacta, a pesar de la gran cantidad de trabajos de investigación reportados en el mundo.

• Resolver la ecuación de *Riccati*, equivale a destrabar muchos problemas actuales en las diversas areas: Física, Ingeniería, Matemáticas, Biología, etc de la actualidad.

• En partícular en Matemáticas daría solución completa a la ecuación diferencial de segundo orden; lo cual claramente, tendrá que esperar.

Bibliografía

M Gerber, B Hasselblatt “ The Riccati equation: Pinching of forcing and solutions” Experimental Mathematics **12** No 2 (2003).

K C Chou, Alan S. Willsky “Multiscale systems, Kalman filters and Riccati equations” IEEE transaction on Automatic Control **39** No 3 (1994).

B Mielnik, “Factorization method and new potentials with the oscillator espectrum” J. Math.Phys. **25** (1984) 387.

D J Fernández C. “New hydrogen-like potentials” Lett. Math. Phys **8** (1984) 337.

D J Fernández C., R. Muñoz and A. Ramos, “Second order SUSY transformations with ‘complex energies” Phys. Lett. A **308** (2003) 11.

O Rosas Ortíz and R. Muñoz,"Non-Hermitian SUSY hydrogen-like Hamiltonians with real spectra" J. Phys. A: Math Gen. **36** (2003) 8497.

D J Fernández C. and E. Salinas-Hernández,"The confluent algorithm in second order supersymmetric quantum mechanics" J. Phys A: Math. Gen. **36** (2003) 2537.

Polyanin,Andrei Dmitrievich "Hanbook of exact solutions for ordinary differential equations", Boca Raton: Chapman and Hall/CRC 2002

Cristinel Mortici " The method of the variation of constants for Riccati equations" General Mathematics **16** (2008) 111.