



Ciclo de videoconferencias de Matemática Educativa en las Instituciones de Educación Media Superior y Superior. “Tecnología y Desarrollo de Conocimiento”

Actividades de Modelación y Graficación para comprender las gráficas de las funciones con la TI-Nspire.

Dr. [Eduardo Carlos Briceño Solís](mailto:ebsolis@uqroo.mx)

ebsolis@uqroo.mx

Universidad de Quintanaroo

Construya la gráfica de $y=x^2$

- Procedimiento usual
- Tabular + Puntear + Trazar
- $(-2)^2 = 4$
- $(-1)^2 = 1$
- $0^2 = 0$
- $1^2 = 1$
- $2^2 = 4$

-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

La gráfica como la representación del concepto de función

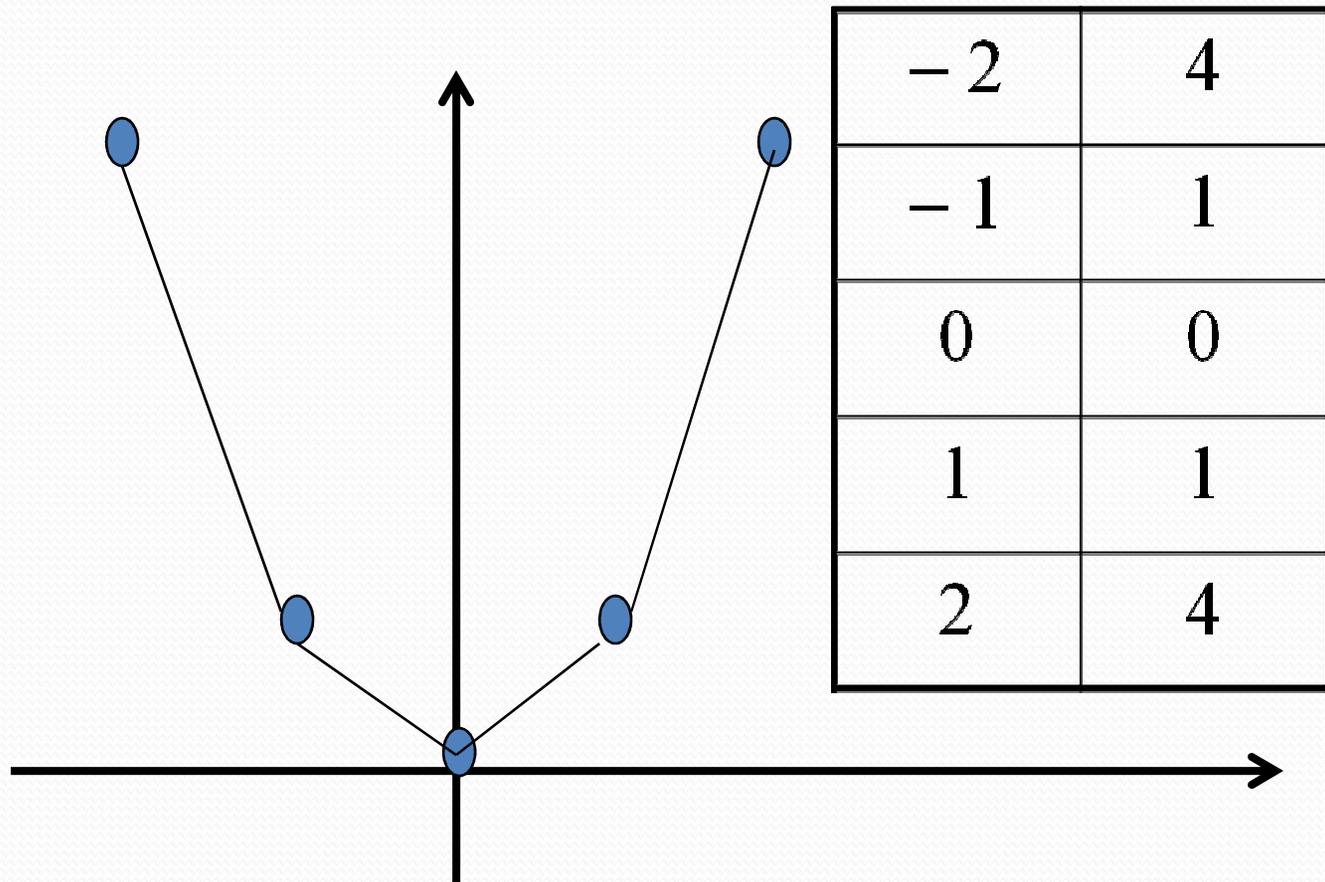


Ilustración 1

Casos donde se producen este bosquejo

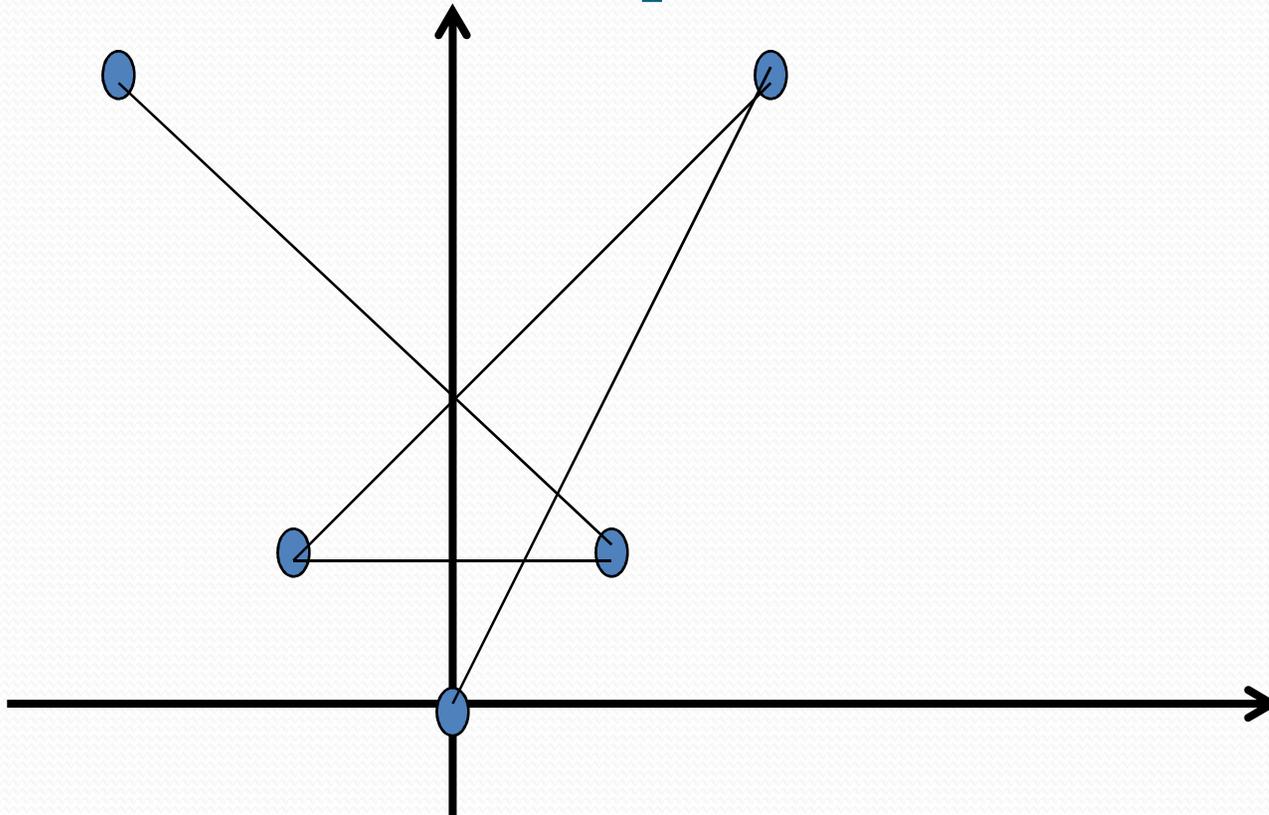
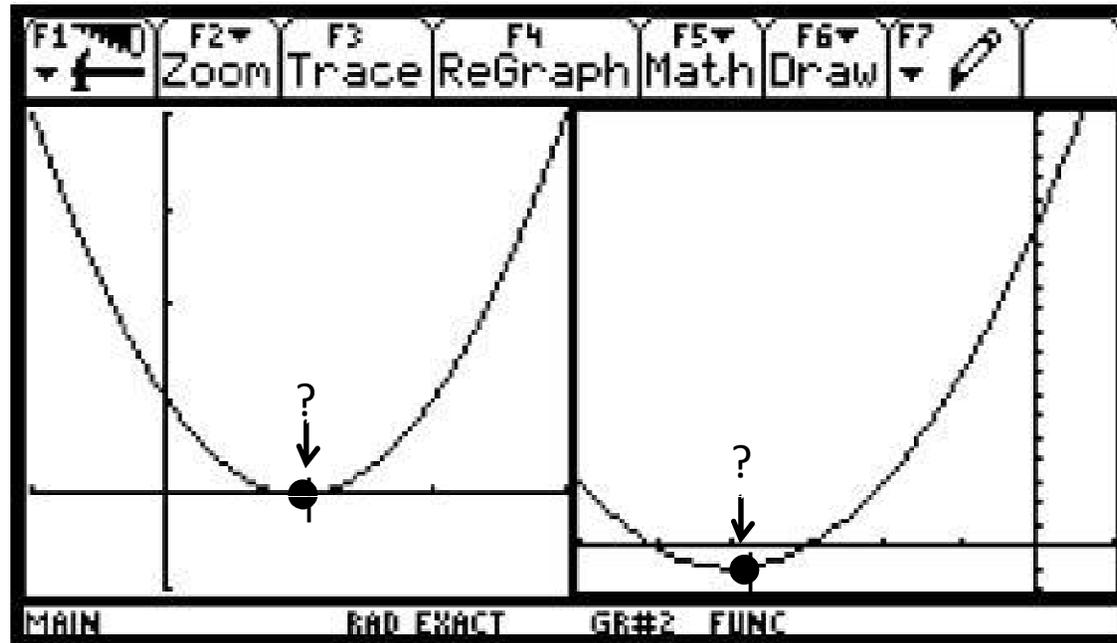


Ilustración 2

-2	4
1	1
-1	1
2	4
0	0

Se sigue una ruta o trayectoria en el punteo

Con la tecnología escolar



$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Los alumnos (Medio superior) responden: $c = 0$ para la parábola de izquierda (está en el nivel 0) y $c < 0$ para la parábola de derecha (la parábola está debajo del eje de las abscisas)(Trouche, 2000).

Ilustración 3

Actividad de modelación del movimiento con el uso de tecnología escolar

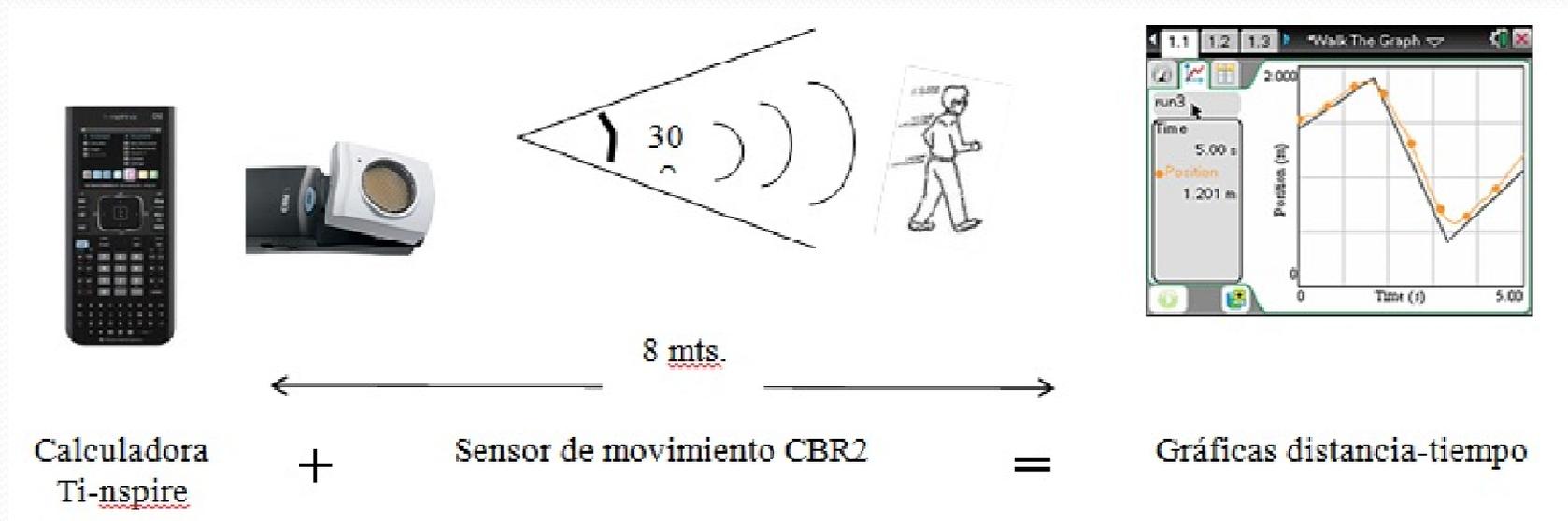


Ilustración 4

Interpretación de los datos a nivel básico

Se proporciona a los estudiantes la tecnología escolar para que realicen el movimiento de una persona que se mueve de un lugar a otro y luego regresar al lugar de inicio



P2



Actividad. Cómo te moverías frente al sensor para obtener una montaña como la siguiente:

Se hace preguntas sobre las inclinaciones de las curvas en la gráfica:

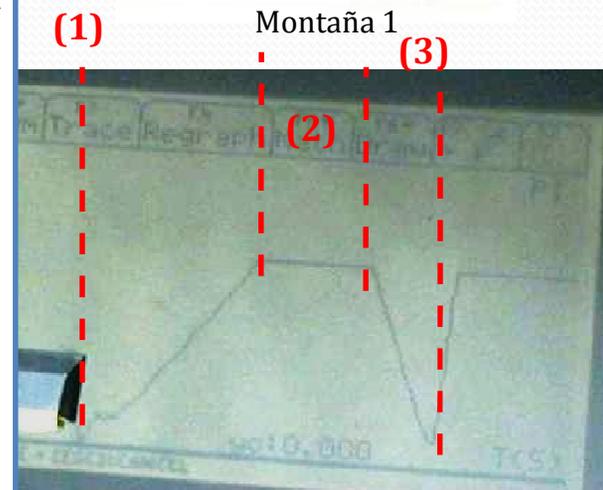
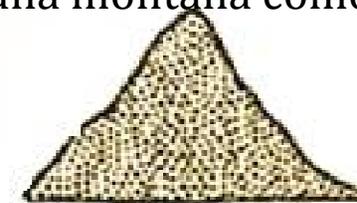
1. **Profesor:** *¿qué diferencias hay entre está y está?*

2. **Estudiante:** *que una está (1) más inclinada, que una está así [Señala una inclinación con la mano] y está, esta más parada (3). [A esta última frase, ella señala la parte de la gráfica con pendiente negativa y con la mano hace una inclinación más elevada a la anterior]*

3. **Profesor:** *¿qué significa esta línea?* [Refiriéndose a la línea horizontal de la gráfica]

4. **Todos:** *que ahí se detuvo (2).*

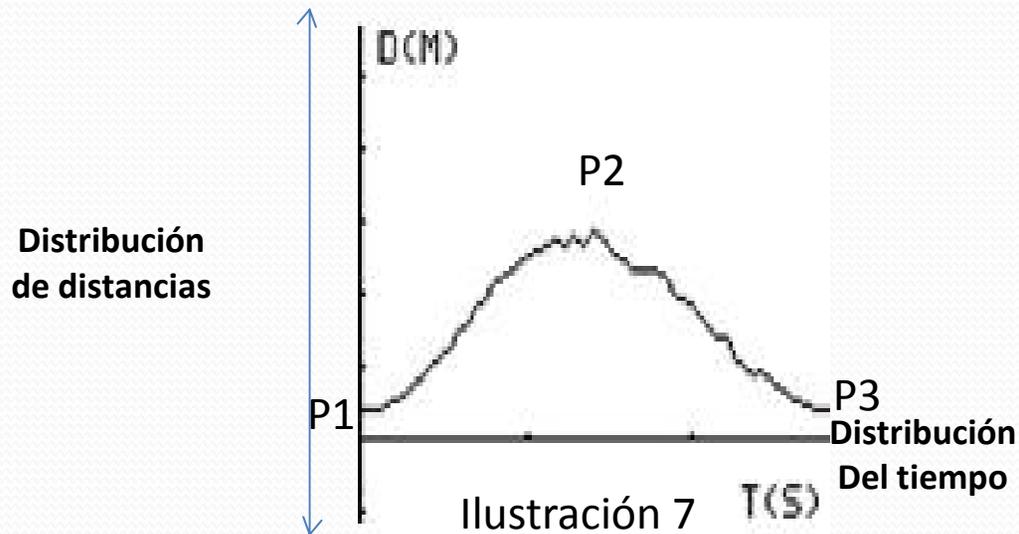
5. **Estudiante:** *Mira camino (1), se detuvo allá (2) y después corrió (3) [apunta hacia la parte horizontal de la gráfica y enseguida mueve su mano simulando un movimiento rápido refiriéndose a la curva con inclinación negativa]*



(Briceño, 2010)

Ilustración 6

Fenómeno de la trayectoria



Al preguntar a los estudiantes que significa el punto P1, P2 y P3, respecto a la posición del trayecto, los estudiantes interpretan que la posición $P1 \neq P3$. (Briceño 2010)

Problemática

La lectura gráfica en el sistema cartesiano, es un sistema aún complejo en los estudiantes de nivel medio superior.

Perspectiva Teórica. Socioepistemología

Forma de contemplar el devenir de una
noción en objeto de saber

Aúna y atraviesa las
tres componentes
ECD dando cuenta
de que la
matemática es un
bien cultural
inmerso en una
sociedad y tiempo
determinados que
condiciona su
comunicación y
apropiación



Dá cuenta de
cómo vive una
noción en las
aulas y el
discurso
matemático
escolar que se
genera

Caracterizar las concepciones de los
alumnos (Cantoral y López 2010)

La Graficación en la visión Socioepistemológica

La Graficación posee su propia estructura, puede llevar a cabo múltiples realizaciones y hacer ajustes en su estructura para producir un resultado deseable, es un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación.

Es en sí misma una modelación, pero aquí modelación no significa una “herramienta didáctica” que ayuda o facilita a construir el concepto de función; sino es una actividad que trasciende y se resignifica, que transforma al objeto en cuestión (Cordero, 2006).

Es en si misma, una modelación, pero aquí modelación no significa una herramienta didáctica que ayuda o facilita a construir el concepto de función; sino es una actividad que trasciende y se construye argumentaciones alrededor del concepto de función (Cen, 2012)

Dimensión epistemológica

Se ha reportado que desde la obra de Oresme, uso figuras geométricas para describir una cualidad del movimiento, esto fue una forma de representar aquellas características de las cosas que cambian (Clagett, 1968). La manera en que Oresme justificó esta cualidad es tomando un punto de una línea horizontal, y levantar una perpendicular a esta línea para representar el cambio de intensidad, es decir, el cambio de cantidad de movimiento (Ver Ilustración 8).

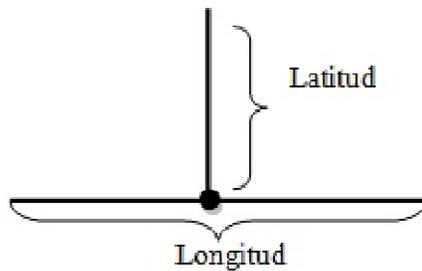


Ilustración 8

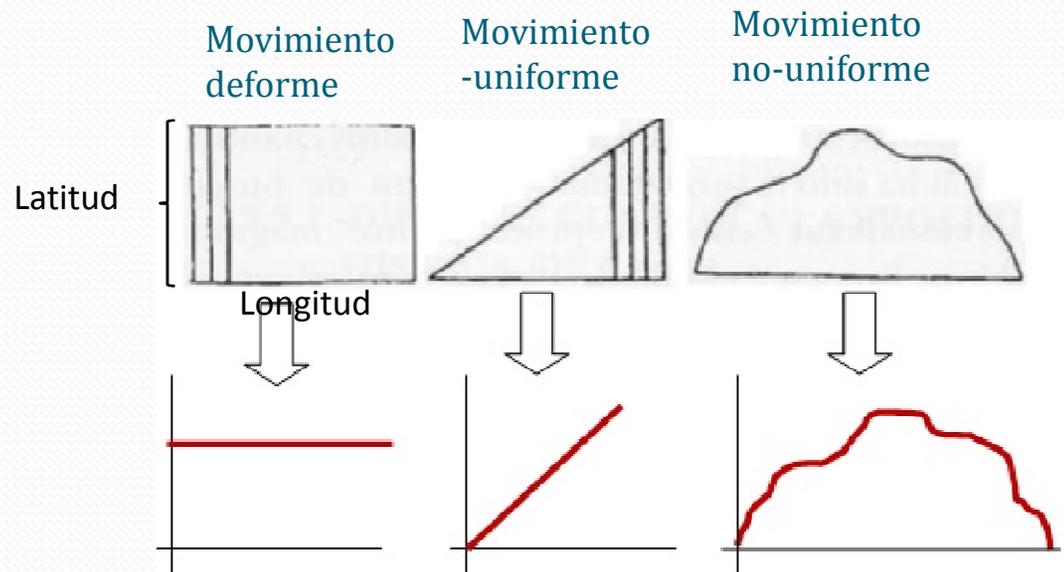
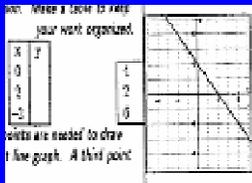
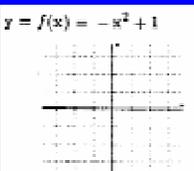
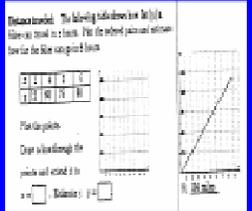
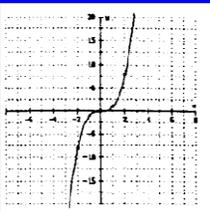
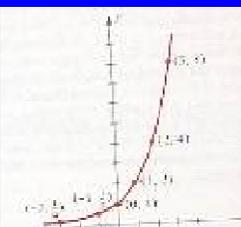
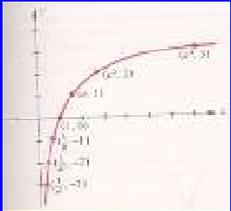
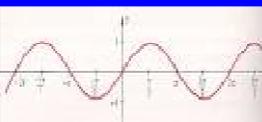
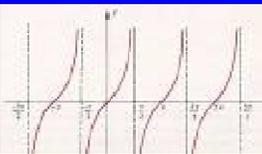
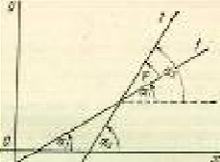
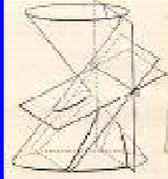
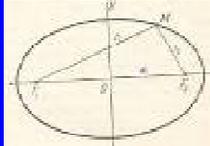
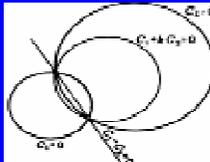
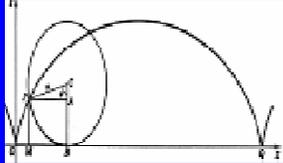
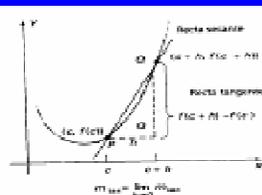
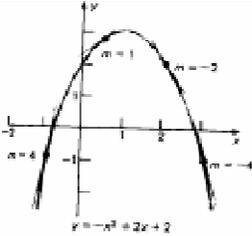
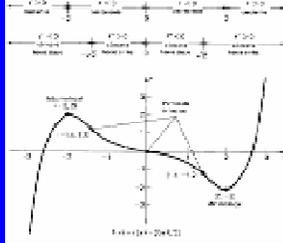
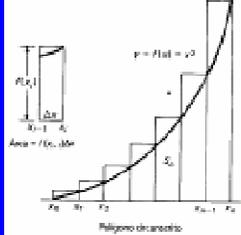
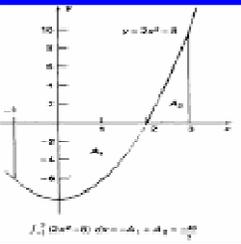
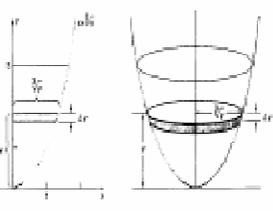
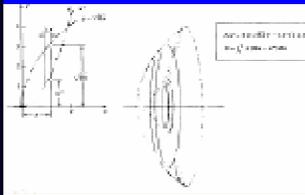
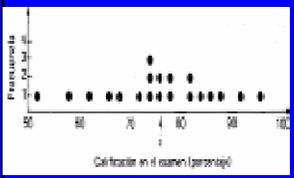
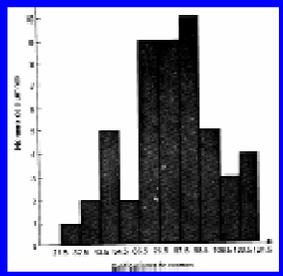
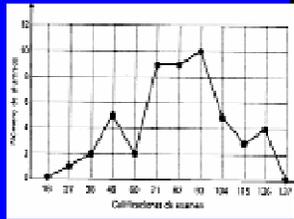
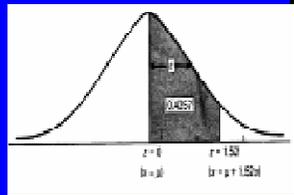


Ilustración 9

D. Didáctica. Las gráficas en libros de texto de bachillerato

Semestre 1	Semestre 2	Semestre 3	Semestre 4	Semestre 5	Semestre 6
ALGEBRA	GEOM. Y TRIG.	GEOM. ANALÍTICA	CÁLCULO DIFERENCIAL	CÁLCULO INTEGRAL	PROB. Y ESTADÍSTICA
 <p>When a table is used your work organized.</p> <p>Grids are needed to draw a line graph. A third point.</p> <p>$y = f(x) = -x^2 + 1$</p>  <p>Discontinuos. To identify discontinuities in the function you need to look for the interval around the center of the singularity.</p>  	   	     	  	   	   



Dimensión Cognitiva

La gráfica como una trayectoria y no, una relación de dos variables.

Dimensión Social

La gráfica tiene que ser algo mas que la representación del concepto de función, es una herramienta que en su uso, lleva a formas de argumentar y reflexionar sobre los objetos matemáticos entre un colectivo. En si se va generando en la graficación, una práctica para que los estudiantes vayan generando conocimiento matemático.

Situación de Modelación del Movimiento: La Tirolesa



La SM_oM_{ov} que hemos denominado “la tirolesa”, se caracteriza por tener actividades que tienen la intención de que los estudiantes usen la gráfica de movimiento para construir argumentos del concepto de una función cuadrática (Om). El objetivo es dar significado a los parámetros A y D de la función $f(x)=Ax^2+D$ por medio de la modelación de movimiento y la graficación (Briceño, 2012).

Los Estudiantes

La puesta en escena se llevó a cabo con 15 estudiantes de nivel medio superior de segundo y cuarto semestre del estado de Coacalco, estado de México. Se organizó el trabajo en equipos donde los estudiantes generaban gráficas de movimiento de la situación para que las discutan entre ellos, y luego pasar al frente a exponer sus resultados a todos.

Actividad 1

Bosqueja una gráfica que represente el desplazamiento de la persona en el plano cartesiano. La persona se desliza desde la bandera negra y finaliza cuando llega a la bandera blanca.

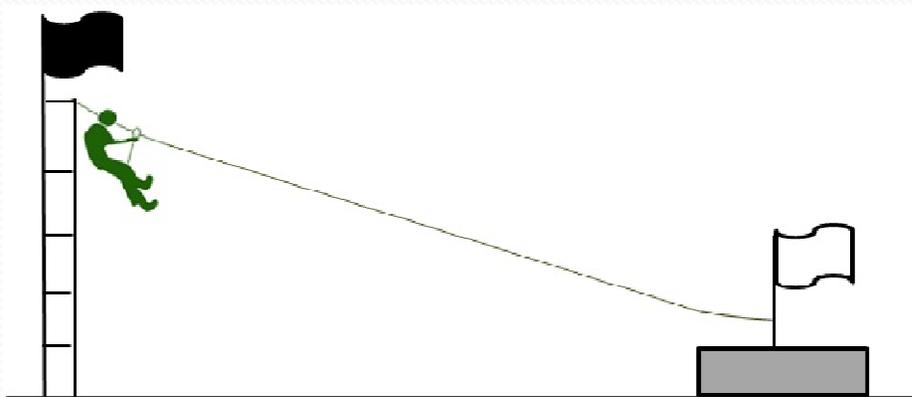


Ilustración 10

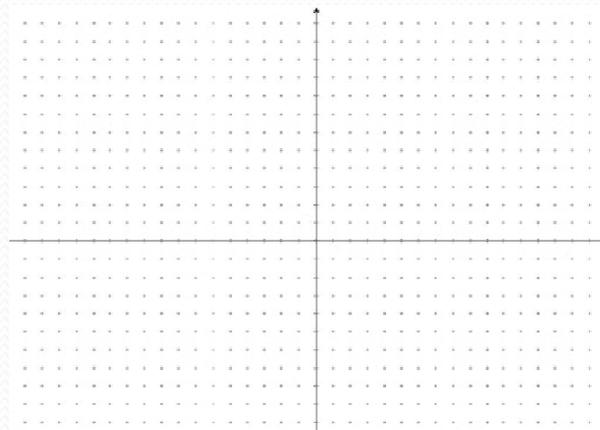
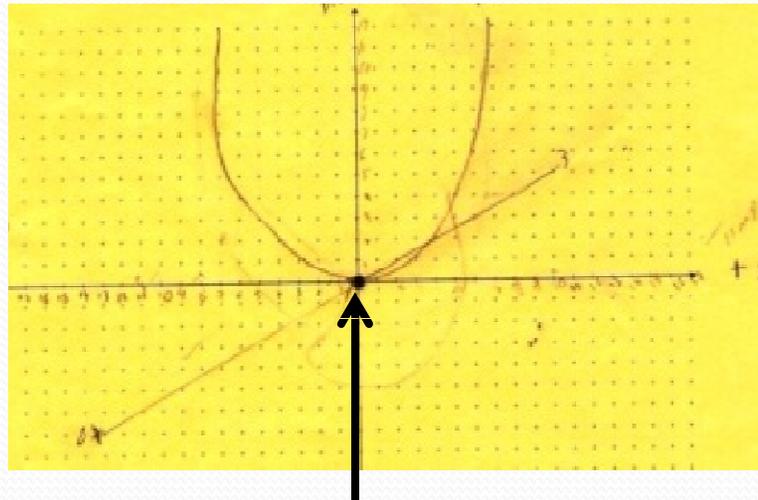


Ilustración 11

E1_E4: *Podemos decir que acá, de acá se lanzó [parte inicial de la gráfica de U] y pasa por acá, el origen y luego va tomando más velocidad [Se refiere a la parte de la gráfica de forma de “U” en el eje positivo de las x.]*



De aquí va tomando velocidad tanto a la curva como la recta

Ilustración 12

Estudiante: *Es que aquí mira, ésta igual puede ser porque por ejemplo, aquí se lanza y conforme va avanzando y pasa por el origen [se refiere a la gráfica de la recta].*

Actividad 2 y 3. La Experimentación

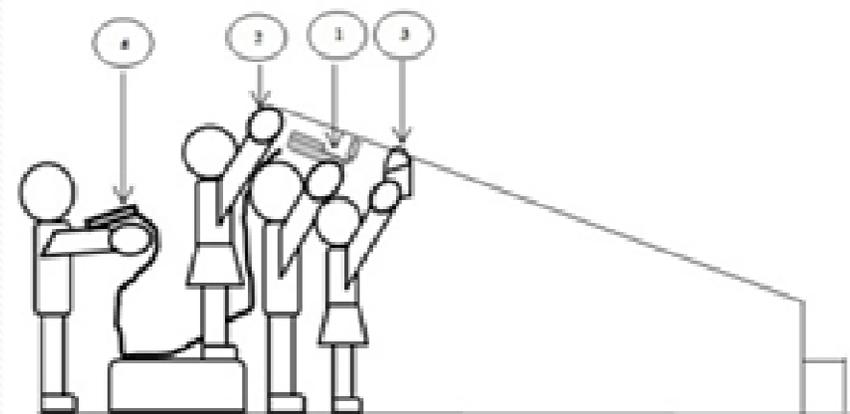


Ilustración 13



Inst. : *La misma pregunta cómo veo o dónde va lento y rápido. [El E1_E1 empieza a hacer marcas en la gráfica como se muestra en la siguiente ilustración 53]*

E1_E1: *De aquí empieza ir más lento [Parte (A)] y aquí va aumentando la velocidad [segunda línea y Parte (B)], hasta llegar acá [tercera línea y Parte (C)] (ver ilustración 53).*

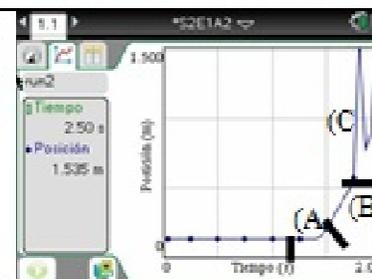


Ilustración 14

Realiza trazos verticales (Latitud)

Inst. : *ok entiendo que va aumentando, pero en esta parte de acá, [La parte B] porqué dices que es rápido, porqué pensamos que es rápido*

E1_E1: *Es por el lugar de inclinación que tuvo, la forma en que aumento la velocidad, aunque aquí se vea que es igual [se refiere a la parte A] pero en el tiempo fue aumentando, o sea de aquí ya fue aumentando en el tiempo [El E1_E1 traza una línea vertical hacia abajo para cortar el eje x, el argumenta que mientras mas avanza en el tiempo (el señala el eje x) más altura tiene la gráfica y eso es la rapidez como se muestra en la ilustración 54].*

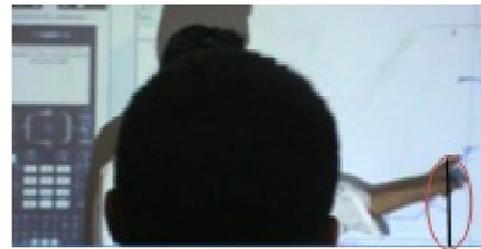


Ilustración 54. Alumno explicando su gráfica de movimiento por medio de una altura

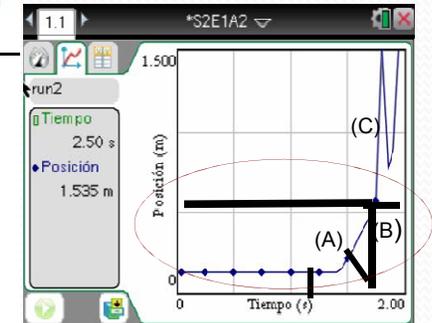


Ilustración 15

Inst. : *Y en el otro [En la parte A]*

E1_E1: *Y aquí ya no es lo mismo, porque el tiempo fue menor [Traza otra línea vertical hacia abajo en la parte A. Lo que quiere decir que en un valor del tiempo en el eje x, es menor la altura a la anterior (ver ilustración 55)].*

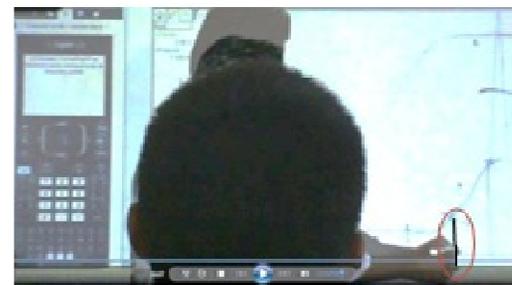


Ilustración 55 Alumno explicando su gráfica

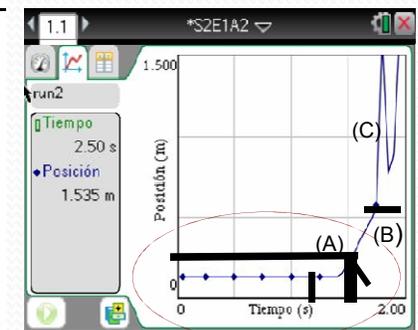


Ilustración 16

Comparar dos gráficas de movimiento

Estudiante: *Si aquí hay un segundo por ejemplo aquí, sería un metro y dos metros, esto es distancia y esto es tiempo. Entonces en un segundo la gráfica uno avanzo un metro y la gráfica dos, avanzo dos metros. [E2_E4 Pasa al frente y hace referencia a los ejes distancia y tiempo, él da un ejemplo de que en un segundo trazando una línea vertical, corta a la gráfica en $y=1$ y 2 metros, él escribe los número ver ilustración 104).*

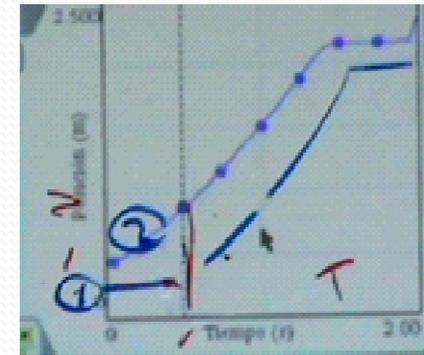
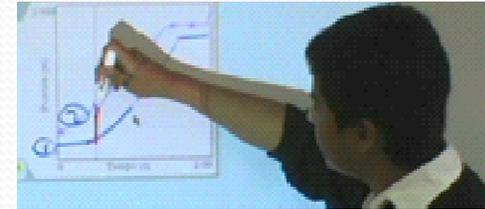
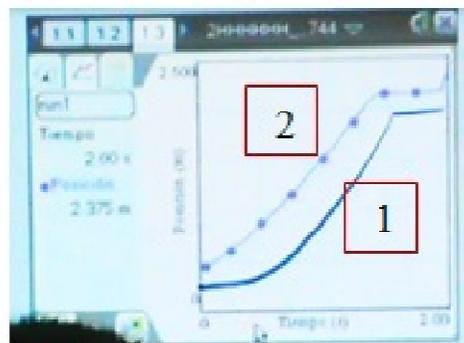


Ilustración 17.



a)

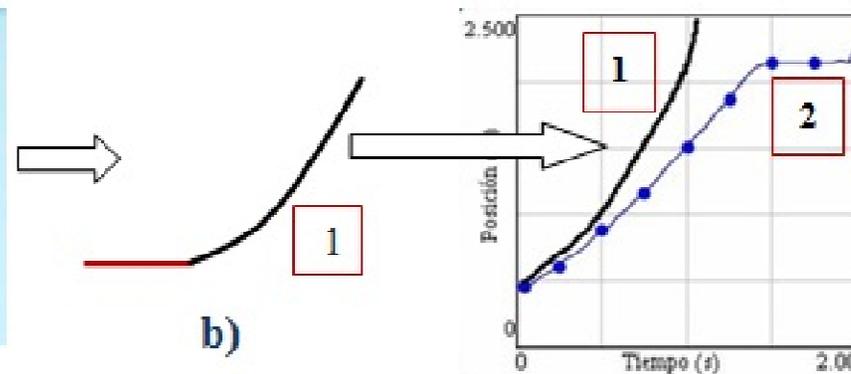


Ilustración 18

c)

Actividad 4

Se pregunta lo siguiente: Ahora que has realizado tres experimentos de desplazamiento en la tirolesa, realiza otros experimentos en donde se obtengan las gráficas de los incisos A y B.

A

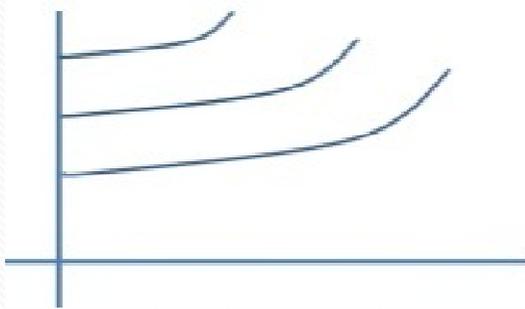


Ilustración 19

B



Ilustración 20

Identificar patrones de comportamiento gráfico

Estudiante: *No mira aquí, fíjate aquí vamos hacerle, la vamos a parar un tantito y esperamos un tanto tiempo y después la soltamos y va a jalar* [La ilustración específica a que parte de la cuerda se refiere]

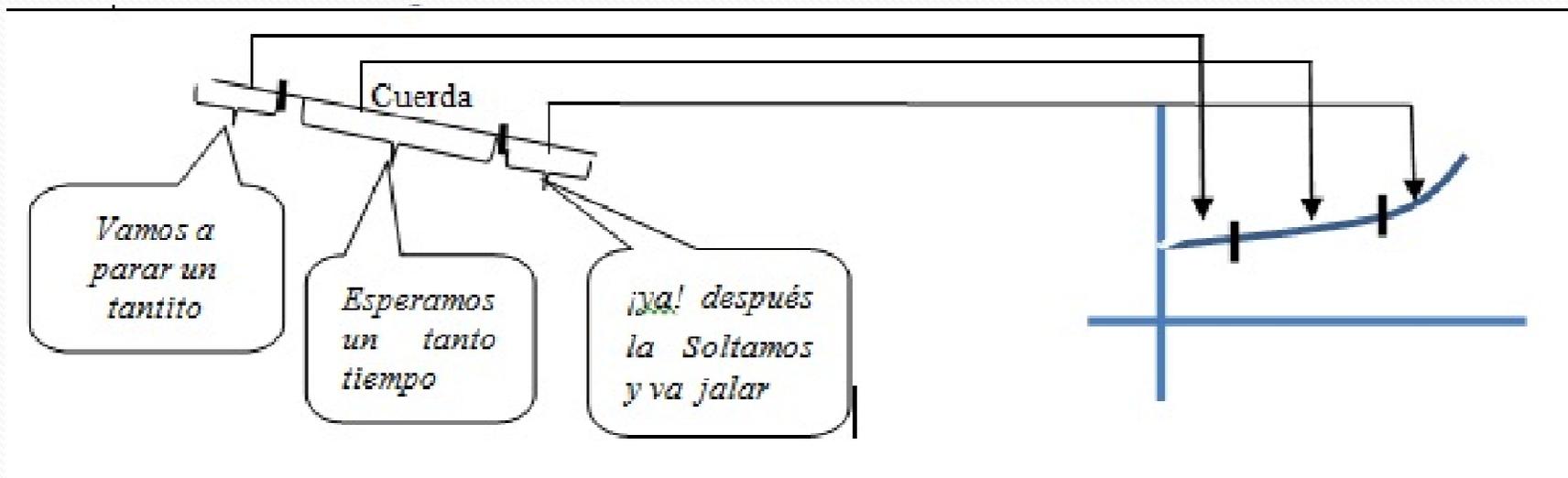


Ilustración 21

Resultado de la experimentación

Profesor: ok, pero en la primera, para la azul cómo tuvieron que hacer, para generar la gráfica la azul [se refiere a la gráfica color azul]

Estudiante: fue de un punto más acá y luego dejarla caer [se refiere a lo dicho en la transcripción anterior]

Estudiante: para la de arriba [la gráfica de color rojo]

Estudiante: fue lo mismo pero con menos tiempo

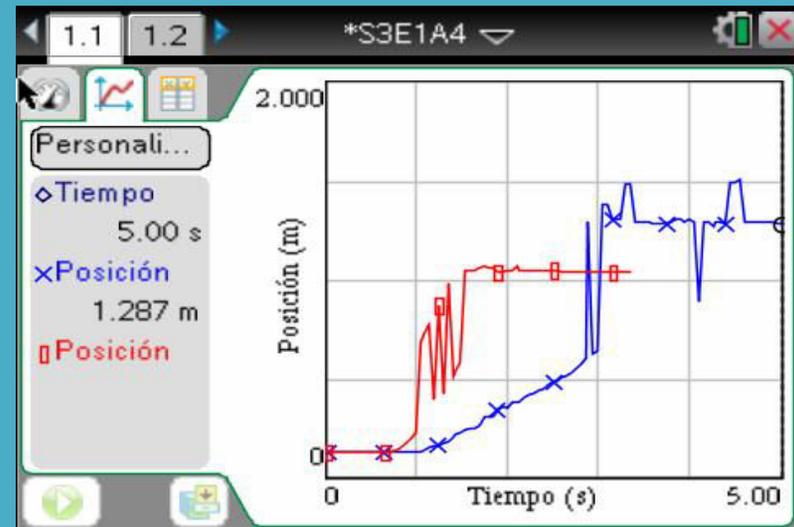


Ilustración 22

Conclusiones a las que llegan

E1_E4: entonces un tiempo, un cierto punto se suelta ¿No? (ver ilustración 63)
[E1_E4 escribe lo que han reflexionado sobre el movimiento con la tecnología y lo relacionan con su gráfica correspondiente enumerándolo].

1. ¿Qué hicieron en la experimentación para generar las gráficas del inciso A y B?

A = 1-B Se deja un tiempo específico para que vaya más lento y después dejarlo caer

2. El mismo proceso pero menos tiempo lento y después rápido

3. Dejarlo caer a la misma velocidad

Ilustración 23

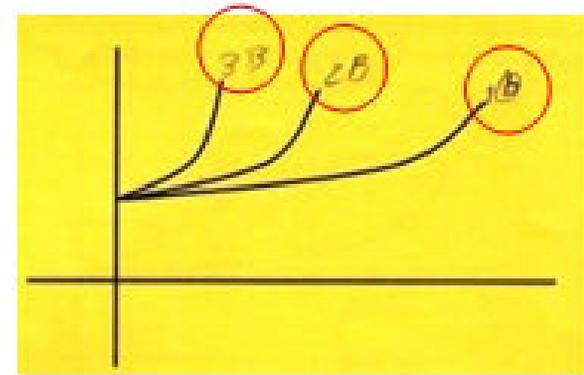


Ilustración 24

Estudiante: Éstas agarran velocidad [el número 3 y 2] y ésta se espera un tanto de tiempo (número 1)

Actividad 5. En la calculadora, gráfica las siguientes funciones y responde las preguntas. a) $f(x) = x^2 + 0$; b) $f(x) = x^2 + 1$; c) $f(x) = x^2 + 2$; d) $f(x) = x^2 + 3$; e) $f(x) = x^2 + 5$

Profesor: va subiendo, ¿están de acuerdo? qué le pasaba a la gráfica cuando le sumamos, 1, 2, 3 (ver ilustración de la derecha)

Estudiante: Va subiendo, va subiendo, es la primera, ¿es la primera? [Se refieren a la gráfica de la actividad 4]

Profesor: Quien es la tirolesa para ti, si vemos el experimento, [Inst. toma el objeto que se desliza por la tirolesa y la cuerda para mostrar el experimento], si vemos el experimento, que ajuste hago para que la gráfica suba

Estudiante: separa la tabla más del sensor [se refiere ir cambiando la posición inicial de del objeto para que vaya subiendo]

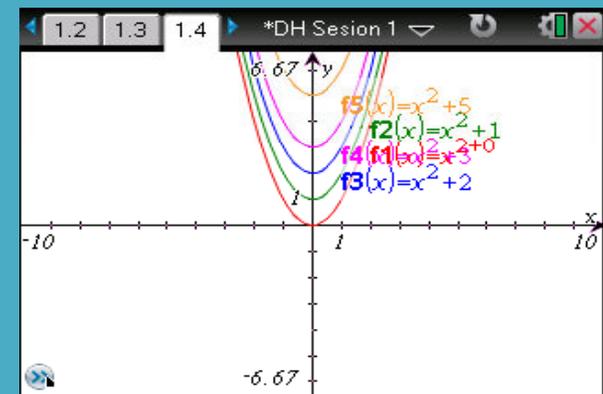


Ilustración 25

Actividad 5. Con la calculadora haz la gráfica de las siguientes funciones..

a) $f(x) = 0.4x^2$; b) $f(x) = 0.6x^2$; c) $f(x) = 1.6x^2$; d) $f(x) = 2x^2$; e) $f(x) = 4x^2$;

Profesor: *Miren la gráfica, esto es [Muestra las gráficas] hace rato para que subiera me dijeron que tenía que poner aquí, después aquí y después aquí y va subiendo [cambiando la posición inicial del objeto que se desliza por la cuerda], ahora para haga esas gráficas así, cómo deben de ser*

Estudiante: *Tendría que ser más arriba para que caiga mas*

Estudiante: *Para que vaya, para que la gráfica tenga menos tiempo y más distancia*

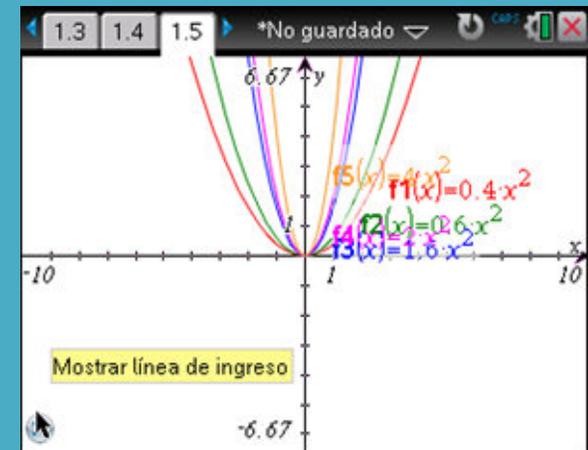


Ilustración 26

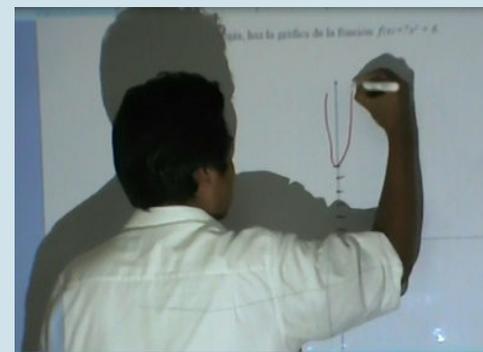
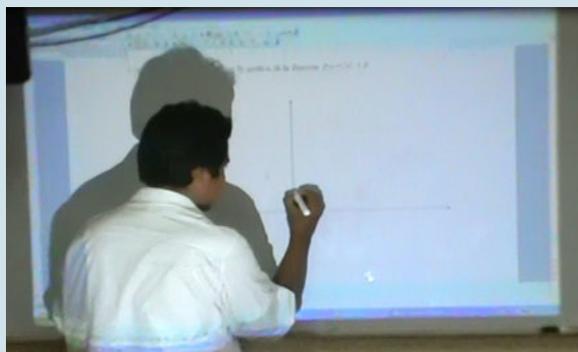
Sin el uso de tecnología, bosqueja la gráfica de la función $f(x)=7x^2 + 6$.

Profesor: pasa a la última actividad donde se trata de que grafiquen sin el uso de calculadora la función $f(x)=7x^2 + 6$.

Inst. _: *qué representa este número [se refiere al 7]*

Estudiante: *Es el ancho ¿no? nomas contaría hasta seis y a través de la distancia [Se refiere a la distancia del origen al vértice de la parábola, se refiere al número seis]*

Profesor: *A ver ven a graficarlo [pasa E1_E1 a graficar en la pizarra ver ilustración]*



. Ilustración 27 Bosquejo de la gráfica sin tecnología

Evidencia escrita

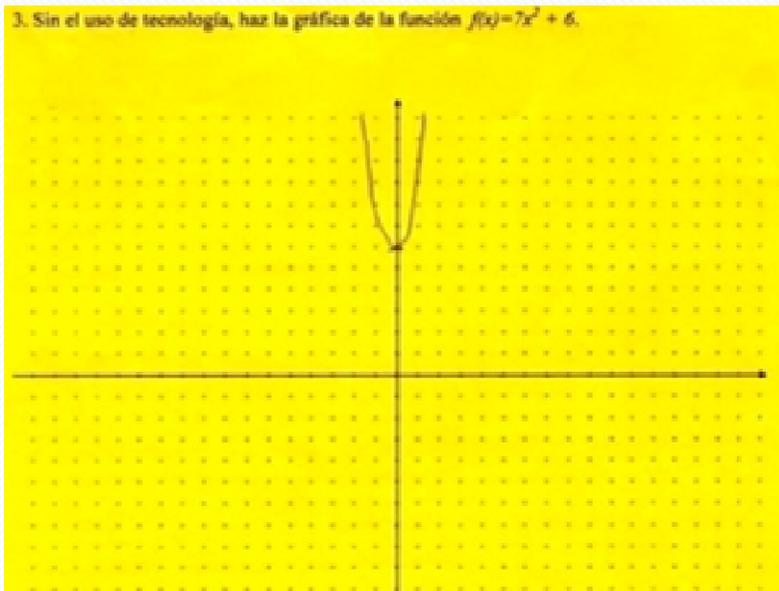


Ilustración 28. Evidencia de bosquejo de la gráfica sin tecnología

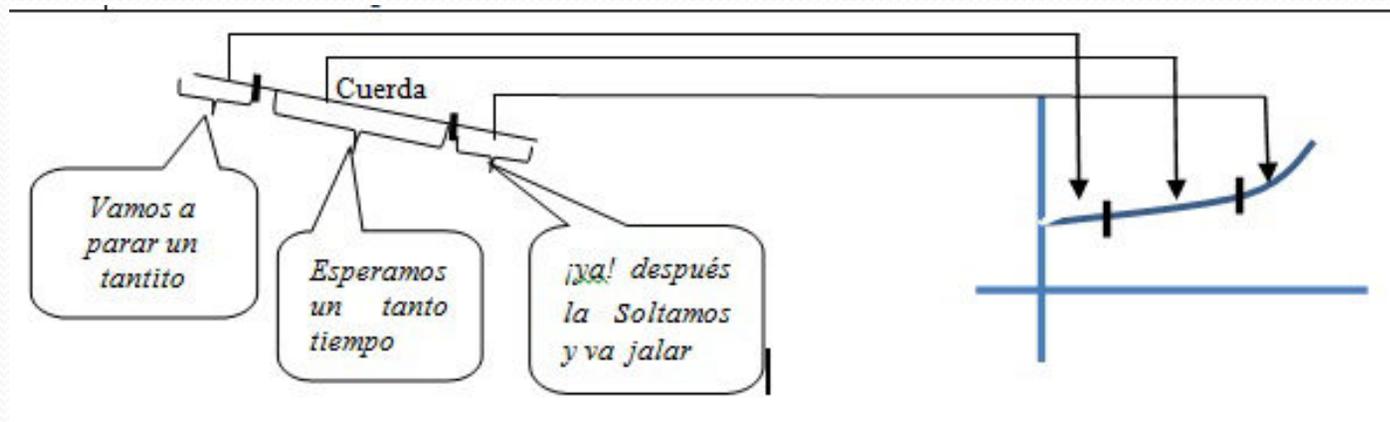
4. ¿Cuál es la relación de estas gráficas respecto al experimento?

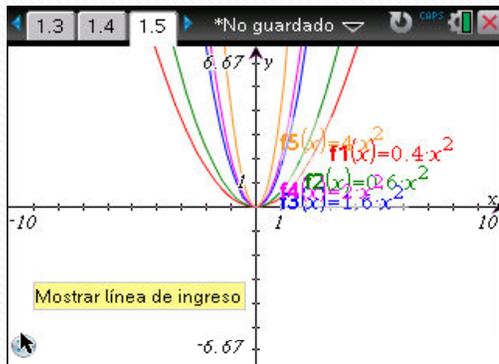
Respecto a la relación, tenga menos tiempo y más distancia por la altura.

Ilustración 29. Relación funcional de la gráfica con los parámetros de $F(x)$

CONCLUSIONES

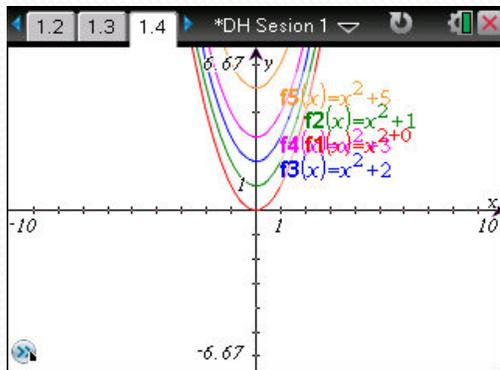
- La situación: La tirolesa, ha sido rico en el dialogo, interacción, el debate y reflexión.
- La relación entre la Modelación-graficación se amplia a través del uso de la gráfica como instrumento de argumentación.





Estudiante: Podría ser que la A es el tiempo

$$f(x) = Ax^2$$



Estudiante: separa la tabla más del sensor

$$f(x) = x^2 + D$$

- 
- La experimentación de modelar el movimiento usando las graficas y dar explicaciones, permitió a los estudiantes ver a la gráfica con cierta cualidad para establecer relación entre los ejes distancia y tiempo. La variación de parámetros fue muy pertinente en ese aspecto y ver su relación con la experimentación.
 - Los coeficientes de la función cuadrática adquiere otros significados en la situación para interpretarla en el sistema cartesiano.

Referencias

Briceño, E. (2010.). *Lo que norma una integración tecnológica en un escenario de difusión: De las trayectorias hacia el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. Documento Predoctoral, CINVESTAV, México.

Briceño, E. & Cordero, F. (2012). Un estudio del uso de tecnología en situaciones de modelación del movimiento. En O. Covian, Y. Chávez, J. López, M. Méndez, A. Oktaç. *Memorias del Primero Coloquio de Doctorado*, ISBN: 978-607-9023-08-9, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Cinvestav. 203 – 212.

Cantoral, R., & López-Flores. (2010). La Socioepistemología: un estudio de su racionalidad. *Paradigma*, 31(11).

Clagett(1968) .del Tractus de configurationibus qualitatum et motum de Oresme, 1323-1368. (Se toma el tratado de la traducción)

Cen Chen, C. Cordero, F. y Suárez, L. (2010) Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 13(2):187-214. Cantoral, R; Farfán, R; Lezama, J; Martinez, S;. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. (L. Radford, & B. D'Amore, Eds.) *Revista Latinoamericana en investigación en Matemática Educativa*, 27-46.

Suarez, L y Cordero, F. (2010). Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio sociepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4-II), 319-333.

Trouche. (2000). La parabole du gaucher et de la casserole a bec verseur : etude des. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 239-264.