El uso de software en un curso de Cálculo

Dr. César Cristóbal Escalante

Área de matemáticas, Departamento de Ciencias,

DCI- UQROO

El proceso de aprendizaje se desarrolla en la forma siguiente:

- Las experiencias vividas por un individuo se constituyen y reflejan en los **modelos o sistemas conceptuales.**
- Al interaccionar con su ambiente el sujeto construye modelos **mentales o internos**,
- Al exteriorizar de alguna forma sus ideas o modelos internos, las personas construyen modelos **externos**, utilizando alguna forma de **representación.**

El proceso de Aprendizaje se desarrolla en la forma siguiente:

- En cada individuo estos modelos son **sistemas interactuantes**. Las discrepancias entre los modelos internos y externos (o representaciones externas) puede llevar a cambios en ambos.

- **un modelo es un sistema cuyo significado está constituido por las interacciones de sistemas internos, externos, y las representaciones que están distribuidas entre ellos.**

Proceso de aprendizaje de las matemáticas
es un proceso que implica una serie de
ciclos de entendimiento,
en los cuales se construyen
modelos matemáticos,
que se van refinando en cada ciclo.

Aprender matemáticas no es solo aprender definiciones, propiedades, procedimientos

También implica

Desarrollar habilidades, actitudes, hábitos

La resolución de problemas, la modelación y el trabajo colaborativo son actividades que contribuyen a ello.

¿Qué tipos de tareas ayudan a los estudiantes a desarrollar formas de razonamiento consistentes con las prácticas matemáticas?

¿Cómo pueden los estudiantes construir conocimiento matemático?

¿A qué nivel el uso de herramientas computacionales favorecen las aproximaciones de los estudiantes en la resolución de problemas?

Cisterna

Un granjero desea construir una cisterna para almacenar agua. Ha estimado que una cisterna de N metros cúbicos de volumen, es más que suficiente para cubrir sus necesidades durante un largo período. Decidió que el depósito no tendrá tapa, que la base y las paredes serán de concreto y tendrán un grosor de g cms. Debe seleccionar la forma de la base: circular o cuadrada. ¿Qué opción debe tomar el granjero si desea minimizar la cantidad de concreto utilizada en la construcción de la cisterna? ¿Qué dimensiones debe tener la cisterna?

Ejemplos de aproximaciones iniciales

Consideremos los siguientes dos casos.

$Vol_1 = N m^3 = l^2 h_1$

Area de las caras:

$A = l h$

$Vol_{\text{caras}} = l h g$

4 caras

$V_{\text{caras total}} = 4 l h g.$

Area de la base:

$A_{\text{base}} = (l + 2g)^2$

$Vol._{\text{base}} = (l+2g)^2 g$

~~Vtotal~~

$V_{\text{total de concreto}} = g(l+2g) + 4lhg$

Area superf

$Vol_2 = \pi r^2 h_2 = N m$

$\text{Area base} = \pi r^2$

$\text{Vol. base} = g \pi r^2$

$\text{Area superficial} = 2\pi r (h_2 + g)$

$\text{Vol. superficial} = 2\pi r (h_2 + g) g$

$V(x,h) = x^2 h = N$

$S(x,h) = x^2 + 4xh$

$V(r,h) = \pi r^2 h = N$

$S(r,h) = \pi r^2 + 2\pi r h$

Minimizar $S(r,h)$ s.a. $V(r,h) = N$ $\quad V(r,h) - N = 0$

$L(r,h,\lambda) = h 2\pi r + \pi r^2 + \lambda(N - \pi r^2 h)$

$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{\partial L}{\partial h} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$

Supongamos que D es el crédito inicial, entonces para el primer mes la deuda será de:

$D_1 = D + 0.0138(D)$

Transcurrido este primer mes paga el 2% de la deuda más \$1000.00, es decir ahora tenemos una cantidad D_2:

$D_2 = D_1 - 0.02(D_1) - 1000$, a partir de esta cantidad D_2 el banco le cobra el 1.387%, y así obtenemos la deuda D_3 correspondiente al segundo mes:

$D_3 = D_2 + 0.0138 D_2$, nuevamente con esta deuda paga el 2% correspondiente más \$1000.00, si procedemos de esta manera obtenemos la deuda correspondiente al mes numero 24, a continuación se muestra todo el procedimiento:

$$D_1 = D + 0.0138D \qquad \textit{deuda primer mes}$$
$$D_2 = D_1 - 0.02D_1 - 1000$$
$$D_3 = D_2 + 0.0138D_2 \qquad \textit{deuda segundo mes}$$
$$D_4 = D_3 - 0.02D_3 - 1000$$
$$D_5 = D_4 + 0.0138D_4 \qquad \textit{deuda tercer mes}$$
$$\vdots$$
$$D_{44} = D_{43} - 0.02D_{43} - 1000$$
$$D_{45} = D_{44} + 0.0138D_{44} \qquad \textit{deuda 24avo mes}$$

De lo anterior se observa que se pude escribir en términos de la cantidad D, es decir:

$$D_1 = D + 0.0138D = D(1+0.0138)$$
$$D_2 = [D(1+0.0138) - 0.02(D(1+0.0138)) - 1000] = D(1+0.0138)(1-0.02) - 1000$$
$$D_3 = [D(1+0.0138)(1-0.02) - 1000](1+0.0138)$$
$$D_4 = [D(1+0.0138)^2(1-0.02) - 1000(1+0.0138)](1+0.02) - 1000$$
$$D_5 = \{[D(1+0.0138)^2(1-0.02) - 1000(1+0.0138)](1+0.02) - 1000\}(1+0.0138)$$
$$D_6 = [D(1+0.0138)^3(1-0.02)^2 - 1000(1+0.0138)^2(1-0.02) - 1000(1+.0138)](1+0.02) - 1000$$
$$\vdots$$
$$D_{44} = [D(1+0.0138)^{22}(1-0.02)^{21} - 1000(1+0.0138)^{21}(1-0.02)^{20} - \cdots - 1000(1+.0138)](1+0.02) - 1000$$
$$D_{45} = \{[D(1+0.0138)^{22}(1-0.02)^{21} - \cdots - 1000(1+.0138)](1+0.02) - 1000\}(1+0.0138)$$

El porcentaje del 24-avo mes sería de .0138 (D_{45})

Como se observa los parámetros importantes son el crédito inicial D el porcentaje de interés mensual y los pagos mensuales.

R1

C8 =C7-(C7/(B7-1))+2*D6

	A	B	C	D
1				
2		Concentración de Sal		
3				
4		Datos		
5	semana	Volumen (M3	Cantidad de s	Concentración sal(Kg/M3)
6	0	4000	4000	1
7	1	4000	4000.99975	1.00024994
8	2	4000	4001.99925	1.00049981
9	3	4000	4002.9985	1.00074962
10	4	4000	4003.9975	1.00099938

G8 =D8-(D8/(C8-1))+2*(E8)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		X(t) cantidad total de sal al inicio de la semana t						
3		V volumen de agua al inicio de la semana 0						
4		C(t) concentración de sal						
5								
6				inicio de semana			Final de semana	
7		semana	V	X(t)	C(t)	V	X(t)	C(t)
8		1	200	2	0.01	200	2.00994975	0.01004975
9		2	200	2.00994975	0.01004975	200	2.0198495	0.01009925
10		3	200	2.0198495	0.01009925	200	2.0296995	0.0101485
387		380	200	3.68660255	0.01843301	200	3.68807691	0.01844038
388		381	200	3.68807691	0.01844038	200	3.68954386	0.01844772

Las expresiones para el volumen de las paredes de los dos contenedores están dadas por las siguientes expresiones:

$$V_c(x) = (x + 2g)^2\left(\frac{N}{x^2} + g\right) - N$$

$$V_c(r) = \pi(r + g)^2\left(\frac{N}{\pi r^2} + g\right) - N$$

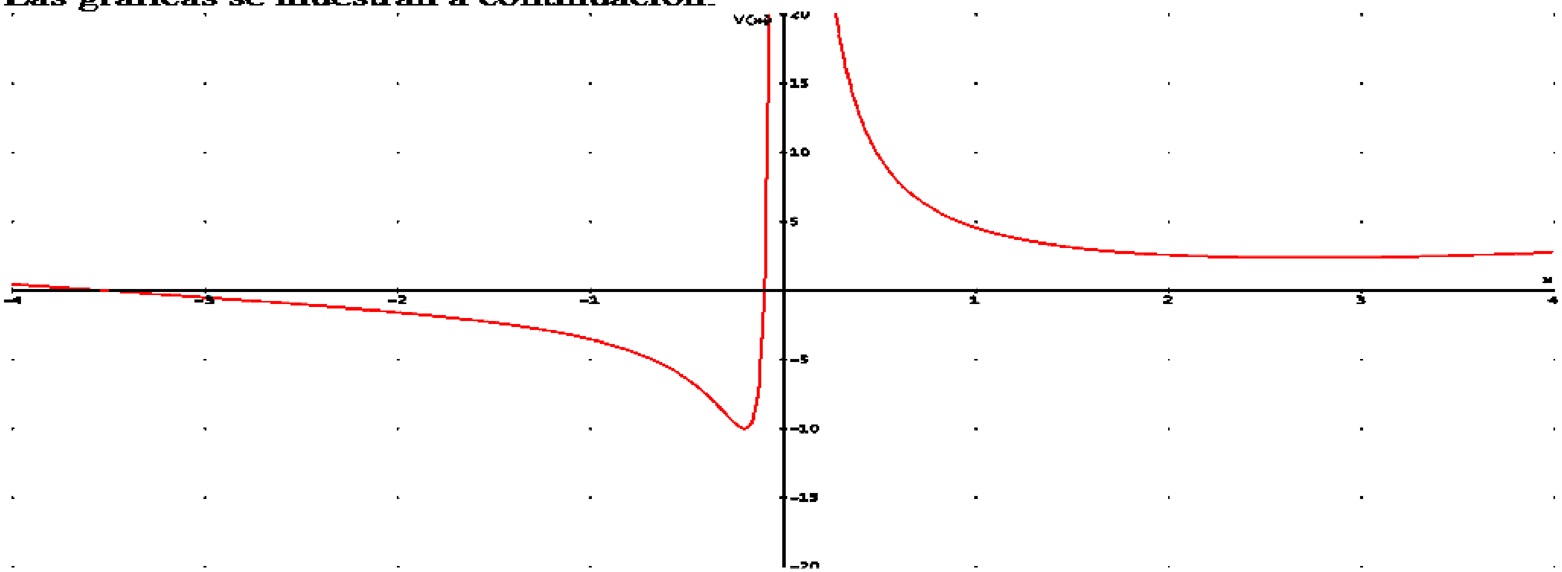
Utilizando derive, derivamos cada una de las funciones, grafico las funciones V y V' para encontrar el mínimo visualmente en V y mediante la herramienta zoom en la gráfica de V'.

Para el contenedor de base cuadrada los resultados son los siguientes (con N = 10 m^2 y g = 0.1 m):

$$V_c(x) = (x + 2 * 0.1)^2\left(\frac{10}{x^2} + 0.1\right) - 10$$

$$V_c'(x) = \frac{5x^4 + x^3 - 100x - 20}{25x^3}$$

Las gráficas se muestran a continuación:



Gráfica de V(x) para el cilindro

Visualmente podemos ver que el mínimo (positivo) de la función (aunque es complicado de verlo) está alrededor de x = 2.

Bibliografía:

Lesh, R. y Doerr, H. M. (Eds) (2003). *Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching.* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. Mahwah, NJ.

Manouchehri, A. (2003). Patterns of reasoning about mathematical models: a case study of high school mathematics teachers. Focus on Learning Problems in Mathematics 25(2). P. 52 – 74.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense - making in mathematics. En D. Grouws (Ed.). *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning.* (pp. 334-370). New York: MacMillan, 1992.