Hipergráficas

Alejandro Flores-Méndez[1,2]
Isidoro Gitler[2]
Enrique Reyes[2]
[1] LIDETEA , Universidad la Salle
[2] Departamento de Matemáticas, CINVESTAV

Motivación y Justificación

- Motivación:
  - Conforti y Cornuejols conjeturaron que:

    "Todas las hipergráficas con la propiedad de empaquetar tienen la propiedad de flujo máximo corte mínimo"
- Justificación:
  - Diversos problemas del tipo min-max pueden enunciarse en términos de hipergráficas
  - Las hipergráficas con la propiedad de flujo máximo corte mínimo (¿o con la propiedad de empaquetar?), permiten resolver problemas NP en tiempo polinomial
  - $$$

Contenido

- Conceptos Generales
- La conjetura de Cornuejols
- Notas finales

Conceptos Generales

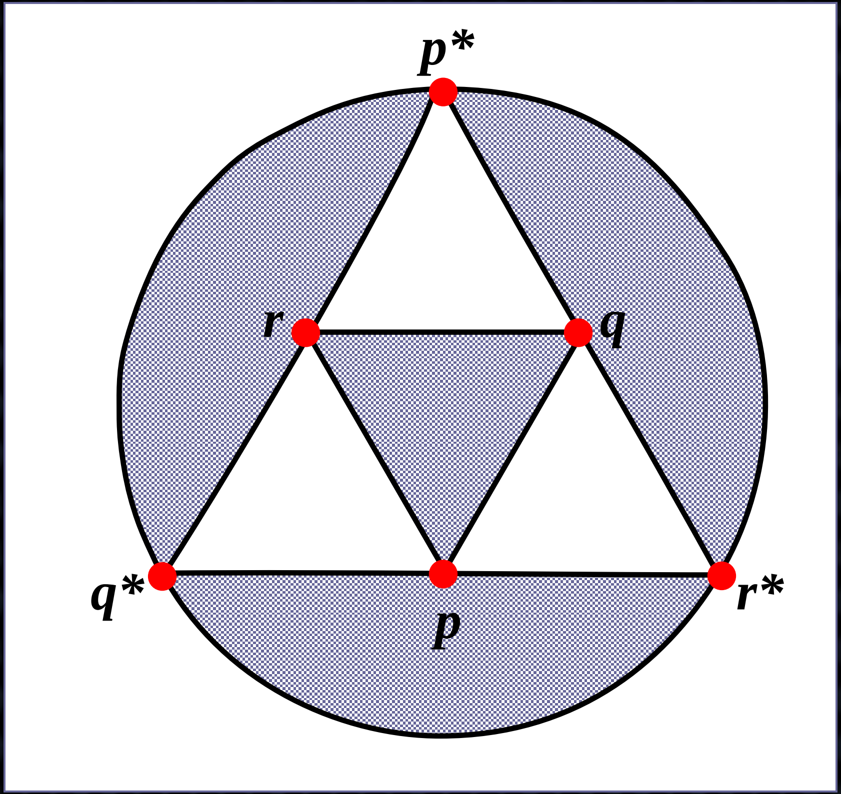
Conceptos Generales

- Una *hipergráfica* es una generalización de una gráfica.
- Una hipergráfica es una pareja (V, E) con V un conjunto finito y $E \subseteq 2^V$
- V y E son los vértices y las *aristas* de H respectivamente.

Conceptos Generales

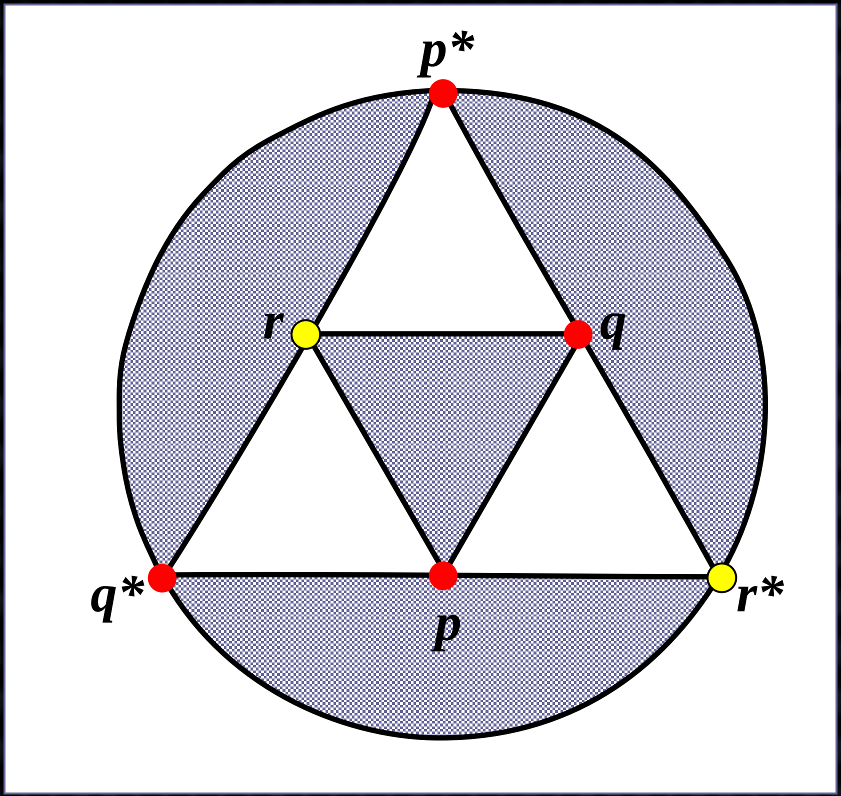
- La *matriz de incidencias de H, A (H)*, es una {0,1}-matriz cuyas columnas son los vectores característicos asociados a las aristas de *H*.
- Al conjunto $C \subseteq V$ se le llama *cubierta de H* si para toda arista de *H* al menos un vértice de *C* está contenido en esta.
  - $\tau(H)$ representa la cardinalidad mínima de un transversal
- A $F \subseteq E$ se le llama un *apareamiento* si para toda pareja $e_1, e_2 \in F$ se cumple que $e_1 \cap e_2 = \emptyset$.
  - $\nu(H)$ es la cardinalidad máxima de un apareamiento

Q_6



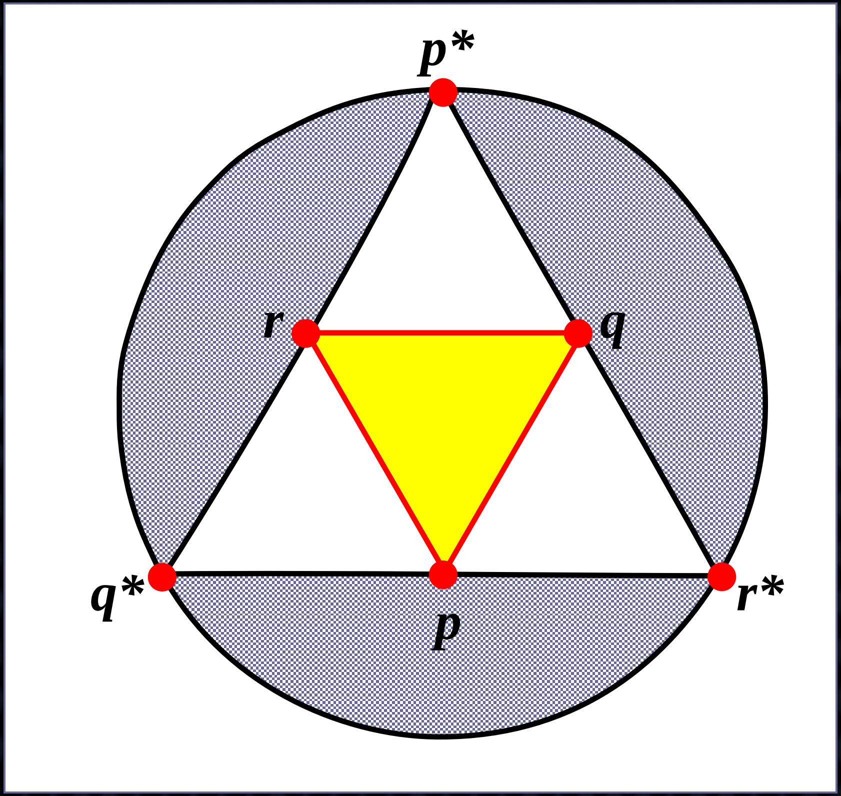
$$A^t\left(Q_{pq}\right)=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} p & p^* & q & q^* & r & r^* \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Cubierta de Q_6



$$A^t\left(Q_{pq}\right)=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} p & p^* & q & q^* & r & r^* \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Apareamiento de Q_6



$$A^t\left(Q_{pq}\right) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} p & p^* & q & q^* & r & r^* \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

Conceptos Generales

- Una hipergráfica <u>empaca</u> si $\tau\ (H) = \nu\ (H)$
  - Muchos problemas del tipo min-max en teoría de gráficas pueden reenunciarse como una hipergráfica que empaca
  - Un ejemplo de una hipergráfica que empaca es una hipergráfica bipartita (König)
  - Un ejemplo menos trivial permite reenunciar el teorema de los 4-colores, como una hipergráfica que empaca
  - El cálculo de $\tau(H)$ o de $\nu(H)$ es un problema NP

Conceptos Generales

- ¿En que casos el cálculo de τ(H) o de ν(H) se puede realizar en tiempo polinomial?
- En general sabemos que:

$$
\begin{aligned}
\tau(C) &\geq \min\{\langle \mathbf{1}, x\rangle : x \geq 0, xA \geq \mathbf{1}\} \\
&= \max\{\langle y, \mathbf{1}\rangle : y \geq 0, Ay \leq \mathbf{1}\} \geq \nu(C)
\end{aligned}
$$

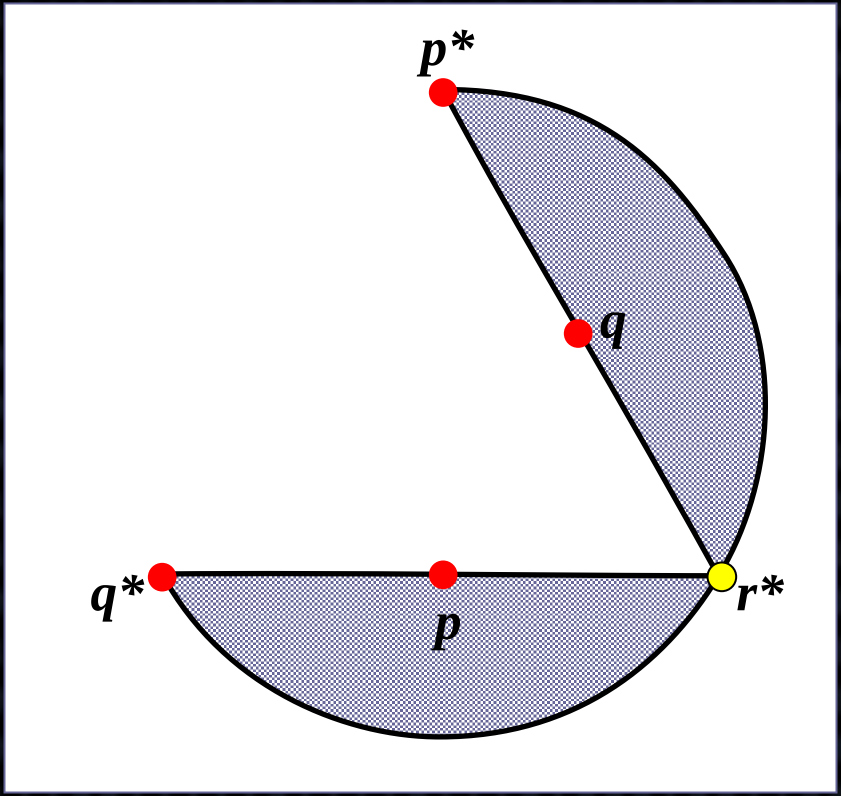
Conceptos Generales

- Sea $H = (V, E)$, $i \in V$. El <u>*borrado*</u> de i, $H \setminus i$, y la <u>*contracción*</u> de i, H / i, se definen como:

$$H / i := (V \setminus i, E / i), \; E / i := \{ e \setminus i : e \in E \}$$
$$H \setminus i := (V \setminus i, E \setminus i), \; E \setminus i := \{ e : i \notin e \in E \}$$

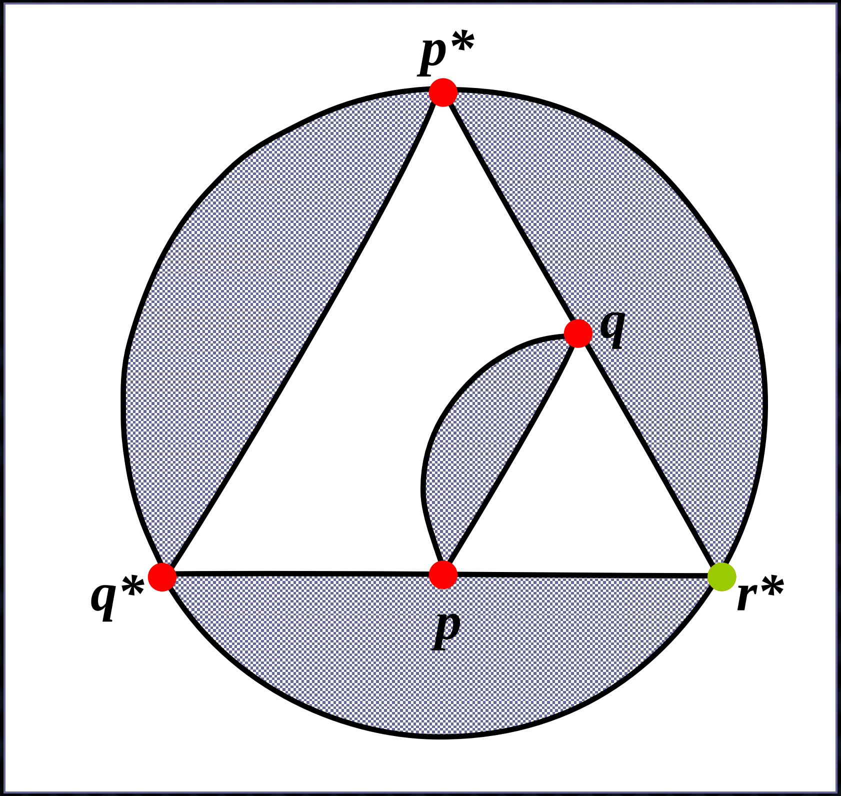
- H' es un <u>*menor*</u> de H si $H' = H \setminus B / C$ (para $B, C \subseteq V$ *tales que* $B \cap C = \emptyset$).

$Q_6 \backslash r$



$$
A^t(Q_{pq}) =
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} p & p^* & q & q^* & r & r^* \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Q_6/r



$$
A^t(Q_{pq}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} p & p^* & q & q^* & r & r^* \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}
$$

La Conjetura de Cornuejols

La Conjetura de Cornuejols

- Se dice que *H* tiene la *propiedad de empaquetar* si *H* y todos sus menores empaquetan.
  - *H* es *mínima no empaquetadora* (MNE) si *H* no empaqueta pero todos sus menores propios si empaquetan
  - Q_6 es MNE

La Conjetura de Cornuejols

- Un clutter C tiene la *propiedad de máximo-flujo mínimo-corte* (MFMC) si ambos lados de la relación dual de PL:

$$\tau^{\omega} = \min\{\langle \omega, x\rangle : x \geq 0,\ xA \geq \mathbf{1}\}$$
$$= \max\{\langle y, \mathbf{1}\rangle : y \geq 0,\ Ay \leq \omega\} = \nu^{\omega}$$

tienen soluciones enteras óptimas x^* e y^* para todo vector entero no negativo ω.

La Conjetura de Cornuejols

- Si un clutter H tiene la propiedad de MFMC, entonces también la tendrán todos sus menores
- Si H tiene la PE entonces el cálculo de $\tau(H)$ se puede realizar en tiempo polinomial
  - No se ha logrado demostrar que el cálculo de $\nu(H)$ también se puede realizar en tiempo polinomial

La Conjetura de Cornuejols

- Si *H* tiene la propiedad de MFMC, entonces tiene la PE.
- Conforti y Cornuéjols conjeturaron que:

"Si la hipergráfica *H* tiene la PE, entonces tiene la propiedad de MFMC"

La Conjetura de Cornuejols

- Entre las clases de clutters que se sabe verifican la conjetura están: los clutters balanceados (Fulkerson, Hoffman and Oppenheim), los binarios (Seymour) y los diádicos (Cornuéjols, Guenin y Margot)
- Recientemente se encontró una nueva familia de hipergráficas que verifica la conjetura (Flores, Gitler, Reyes)
- ¿Será cierta la conjetura en general o existe un contraejemplo?

Notas Finales

Notas Finales

- Existe la necesidad de desarrollar algoritmos y/o programas que permitan
  - Generar candidatos a familias que cumplan con la conjetura
  - Encontrar un contraejemplo
  - Estos por su naturaleza son altamente paralelizables

Notas Finales

- Existen otros problemas en el área asociados a:
  - Coloraciones de vértices,
  - Coloraciones de aristas,
  - Caminos,
  - Conectividad,
  - etc.

¿Dudas?